Hydrodynamic limit of stochastic ranking process

確率順位付け模型の流体力学極限

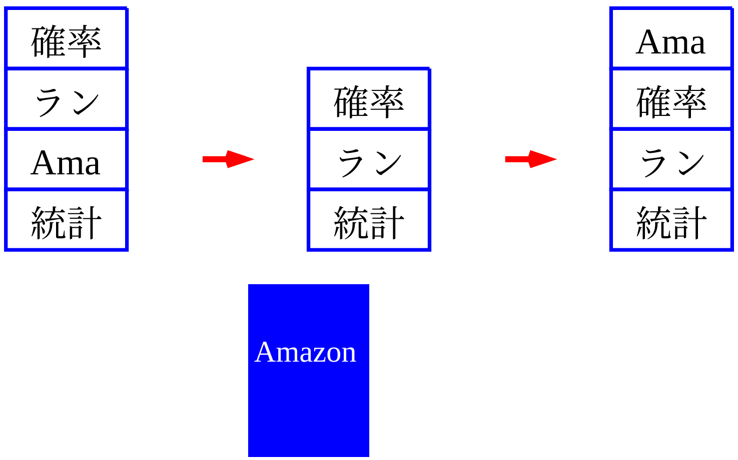
服部哲弥（慶應大・経済）

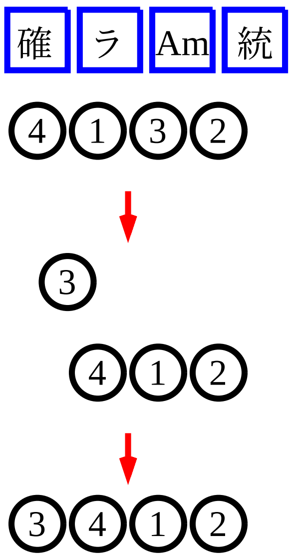
2019.11.07 大規模相互作用系の確率解析（大阪大学）

０．目次

１．先頭に跳ぶ規則

「積ん読」：積み上げた本の塔（必要な本を都度抜き出し，終わったら塔の上に積む）動画１

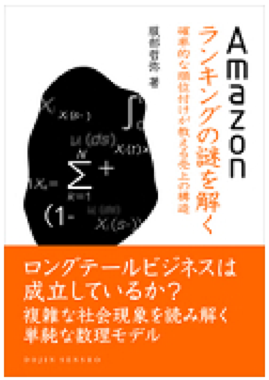




スライドや論文はwebに貼ってあります

web「**服部哲弥**」「Tetsuya Hattori」　　（論文は英語のページ）

↓



服部哲弥「Amazon ランキングの謎を解く」化学同人出版

↓

「4. 本書内容以降の研究の紹介」のすぐ下の行のリンク

９月の日本数学会企画特別講演で今日の前半〜中盤を中心にお話ししたので，
歴史や現象と合ってるという前半の面白い部分の詳細は割愛します．
→企画特別講演のスライドとアブストラクト参照

簡単な（先頭に跳ぶ回数＝Poisson過程の）場合

粒子数N，粒子番号$i=1,\dots,N$ （$N\to\infty$に興味），$T>0$，時刻 $t\in[0,T]$

粒子系 $Y_i^{(N)}(t)\in\{\frac{i}{N}\mid i=0,1,\dots,N-1\}\subset[0,1)$,
（順位は$N\,Y_i^{(N)}(t)+1$）

初期値問題： $Y_i^{(N)}(0)=y_i^{(N)}$, $y_i^{(N)}\neq y_j^{(N)}$, $i\neq j$

先頭に跳ぶ規則：粒子iが先頭$(Y_i^{(N)}(\tau)=0)$に跳ぶとき
追い越された粒子は順位を1ずつ下げる：$Y_j^{(N)}(\tau)=Y_j^{(N)}(\tau-)+\frac{1}{N}$

$\tilde{\nu}_i^{(N)}$: 独立なポワッソン過程（講演前半の簡単版），（強度w_iはi依存）
粒子iが先頭に跳ぶ時刻$\tau=\tilde{\nu}_i^{(N)}$の到着時刻$(\tilde{\nu}_i^{(N)}(\tau)-\tilde{\nu}_i^{(N)}(\tau-)>0)$
ポワッソン過程ν：独立増分点過程（非減少非負整数値）;

$$\mathrm{P}[\,\nu(t)-\nu(s)=k\,]=e^{-w(t-s)}\frac{w^k(t-s)^k}{k!},\ \ k\in\mathbb{Z}_+$$

確率順位付け模型

集合（事象）の定義関数 $1_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \notin A. \end{cases}$

永幡幸生 (2013)

$$Y_i^{(N)}(t)$$
$$= y_i^{(N)} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t \mathbf{1}_{Y_j^{(N)}(s-)>Y_i^{(N)}(s-)}\,\tilde{\nu}_j^{(N)}(ds) - \int_0^t Y_i^{(N)}(s-)\tilde{\nu}_i^{(N)}(ds)$$

右辺第３項：$\tilde{\nu}_i^{(N)}(\tau_{i,k}) - \tilde{\nu}_i^{(N)}(\tau_{i,k}-) = 1$ （到着時刻）$\Rightarrow$

$$Y_i^{(N)}(\tau_{i,k}) - Y_i^{(N)}(\tau_{i,k}-) = -\int_{\tau_{i,k}-}^{\tau_{i,k}} Y_i^{(N)}(s-)\tilde{\nu}_i^{(N)}(ds)$$
$$= -Y_i^{(N)}(\tau_{i,k}-)\left(\tilde{\nu}_i^{(N)}(\tau_{i,k}) - \tilde{\nu}_i^{(N)}(\tau_{i,k}-)\right) = -Y_i^{(N)}(\tau_{i,k}-)$$

$\Rightarrow\ Y_i^{(N)}(\tau_{i,k}) = 0$（先頭に跳ぶ）

第２項：下位にいた粒子 j が先頭に跳ぶと i の順位が１下がる

$$Y_i^{(N)}(\tau_{j,k}) - Y_i^{(N)}(\tau_{j,k}-) = \frac{1}{N}\int_{\tau_{j,k}-}^{\tau_{j,k}} \mathbf{1}_{Y_j^{(N)}(s-)>Y_i^{(N)}(s-)}\,\tilde{\nu}_j^{(N)}(ds) = \frac{1}{N}$$

- 粒子系（従属確率変数列，$N \gg 1$），非対称マルコフ

2.「Amazonランキングの謎を解く」

Amazon.co.jp ランキング
amazon.co.jp
・定義詳細は非公開
・ランキング（人気度，流行度）

流行度の最も簡単な数理モデル：
先頭に跳ぶ規則　＋
ポワッソン（指数）分布　＋
無限粒子極限

はランキングを説明するか（それとも乱暴すぎる近似か）？

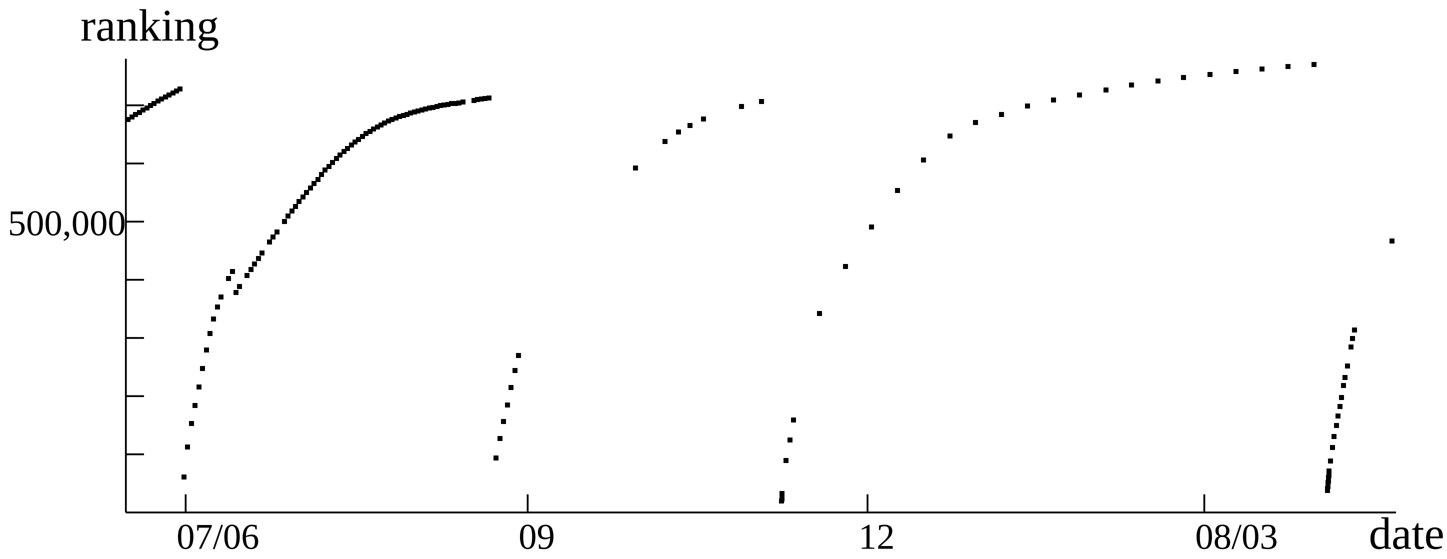
Amazon ランキングは先頭に跳ぶ！

Amazon ランキングと確率順位付け模型を（**勝手に**）対応させる：

i が先頭に跳ぶ時刻（$=\tilde{\nu}_i^{(N)}$ の到着時刻）$=$ 本 i がネット注文された時刻

最初のチェックポイント：

- 注目した本がネット注文されるとランキングは 1 位に跳ぶか？



次のステップ：

- 決定論的な曲線は大数の強法則？
- ヨットの帆の形状を Poisson 過程から導けるか？

特性曲線

再掲：$Y_i^{(N)}(t) = y_i^{(N)}$

$$+ \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t \mathbf{1}_{Y_j^{(N)}(s-)>Y_i^{(N)}(s-)}\,\tilde{\nu}_j^{(N)}(ds) - \int_0^t Y_i^{(N)}(s-)\tilde{\nu}_i^{(N)}(ds)$$

第３項を除いた時間発展（先頭に跳ばない＝代本板(dummy)）

$$Y_C^{(N)}((y_0,t_0),t) = y_0 + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{t_0}^t \mathbf{1}_{Y_j^{(N)}(s-)\geqq Y_C^{(N)}((y_0,t_0),s-)}\,\tilde{\nu}_j^{(N)}(ds)$$

特に $y_0 = 0$ のとき $Y_C^{(N)}((0,t_0),t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathbf{1}_{\tilde{\nu}_j^{(N)}(t)>\tilde{\nu}_j^{(N)}(t_0)}$ は

独立確率変数列の平均→大数の強法則（大数の完全法則：$*^{(N)}$）

- 前半の話は見る量を「分布関数」に選べば独立確率変数列

大数の完全法則

再掲（本の間に挟んだ代本板）：$Y_C^{(N)}((0,t_0),t) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} 1_{\tilde{\nu}_j^{(N)}(t)>\tilde{\nu}_j^{(N)}(t_0)}$

再掲（ポワッソン）：$\mathrm{P}[\,\nu(t) > \nu(s)\,] = 1 - \mathrm{P}[\,\nu(t)-\nu(s) = 0\,] = 1 - e^{-w(t-s)}$

大数の完全法則　（分散有界なら異なる N の確率変数は総取り替えでかまわない）

$W = \mathbb{R}_+$ 上の分布 $\lambda^{(N)} := \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\delta_{w_i}$ ．$\lambda^{(N)} \to \lambda$ のとき，

$$y_C((0,t_0),t) := \lim_{N\to\infty} Y_C^{(N)}((0,t_0),t) = \lim_{N\to\infty} \mathrm{E}[\,Y_C^{(N)}((0,t_0),t)\,]$$

$$= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\mathrm{P}[\,\tilde{\nu}_j^{(N)}(t) > \tilde{\nu}_j^{(N)}(t_0)\,] \;= 1 - \int_W e^{-w(t-t_0)}\,\lambda(dw)$$

- ランダムな順位の時間発展が決定論的な時間発展で近似できる
- 極限もPoisson過程（指数分布）で書ける（後半の話は，書けない）

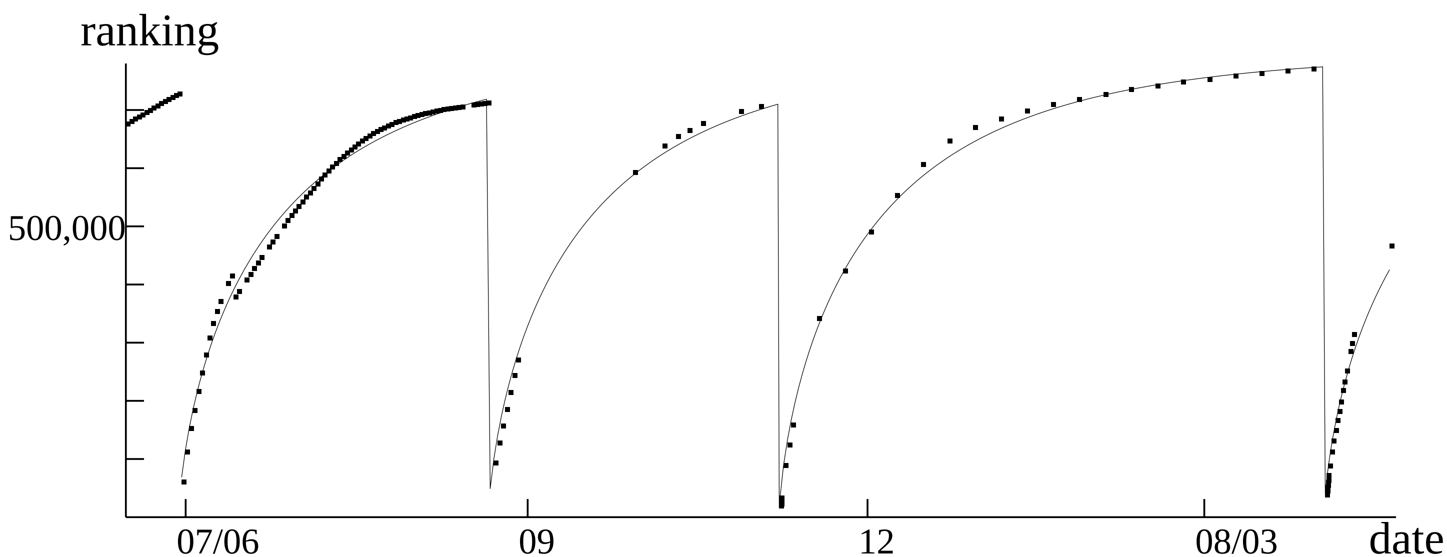
アマゾンはロングテールに非ず

再掲：粒子 i が先頭に跳ぶ時刻＝$\tilde{\nu}_i^{(N)}$ の到着時刻＝本 i がネット注文された時刻

再掲：$y_C((0,t_0),t) = 1 - \int_W e^{-w(t-t_0)}\,\lambda(dw)$; λ：注文頻度 w の分布

時刻 τ に１位の本 i が注文されないまま時刻 $t>\tau$ になったときのランキング $X_i^{(N)}(t) = N\,Y_i^{(N)}(t) + 1 \fallingdotseq N\,y_C((O,\tau),t)$

統計的当てはめ：部外秘情報 λ を Pareto 分布族と仮定



- 定量的にも良い模型（３パラメータで 98 点のデータを当てはめ）
- ロングテール型ではなく，ビッグヒット依存型のビジネスモデル

位置強度結合経験分布

いくつかの補足：

- **特性曲線** y_C **の精密化：位置強度結合分布** $\mu_t^{(N)}$ **と分布関数** $\varphi^{(N)}$

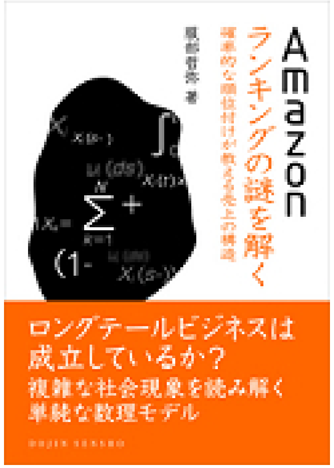
$$\mu_t^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{(w_i, Y_i^{(N)}(t))}$$

$$\varphi^{(N)}(dw, \gamma, t) = \mu_t^{(N)}(dw \times [Y_C^{(N)}(\gamma, t), 1]), \ \ \gamma = (y_0, t_0)$$

$Y_C^{(N)}(\gamma, t) = \varphi^{(N)}(W, \gamma, t)$ **と同様，独立確率変数列の大数の完全法則**

- **強度** w **の** t **依存性：** $w\,(t - t_0) \ \mapsto \ \displaystyle\int_{t_0}^{t} w(s)\,ds$

$W: \ \mathbb{R}_+ \mapsto C([0, T])$ **（日周期等）**



前掲資料や「Amazon ランキングの謎を解く」参照

３．強度が位置依存性を持つ確率順位付け模型

再掲． $Y_i^{(N)}(t) = y_i^{(N)}$

$$+\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_0^t \mathbf{1}_{Y_j^{(N)}(s-)>Y_i^{(N)}(s-)}\,\tilde{\nu}_j^{(N)}(ds) - \int_0^t Y_i^{(N)}(s-)\tilde{\nu}_i^{(N)}(ds)$$

ここまで：強度 w_i **の時刻依存性→** $\tilde{\nu}_j^{(N)}$ **：（非一様）** Poisson **過程（独立増分），**

分布関数 $\varphi^{(N)}$ **が独立確率変数列の平均，極限の確率は指数関数で，** etc.

- **順位の宣伝効果**　$w_i:\ [0,1]\times[0,T]\to\mathbb{R}_+$

強度が位置依存性を持つ確率順位付け模型

$\nu_i^{(N)}$: $\mathbb{R}_+{}^2$ **上の単位強度の** Poisson random measure

$(U(A)=\nu_i^{(N)}(A)$ **は平均が面積の** Poisson **分布，** $A\cap B=\emptyset\Rightarrow U(A)\perp U(B))$

$$\tilde{\nu}_i^{(N)}(ds) = \int_{\xi=0}^{\xi=w_i(Y_i^{(N)}(s-),s)} \nu_i^{(N)}(d\xi\times ds)$$ **楠岡誠一郎** (2012)

- w **を通した従属性**　**→**　$N\to\infty$ **は非独立増分（非マルコフ）**

ここから後半

20 世紀前半の数学を，21 世紀にもなって再度取り上げた理由：

前半（講演のここまで）

- 現象が革命的に新しい
  - 巨大な人気の順位付けが初めて可視化された時代
- 新しい現象には素直な数学を用意

後半（講演のここから）

- 新しい定式化（永幡，楠岡）　→　自然な新しい数学の問題
  - 強度の位置依存性＝従属確率変数　→　非独立増分な具体例

流体力学極限

仮定： $W \subset C^{1,0}$; $\sup_{w\in W} \|w'\| < \infty$, $\mu_0^{(N)} \to \mu_0$ 弱', $\int \|w\|\, d\lambda < \infty$

（注．$\lambda^{(N)} = \mu_t^{(N)}(\cdot \times [0,1])$ 特に $\lambda^{(N)} \to \lambda$：$w$ 非有界許す）

主定理． $\exists \mu_t$; 確率１で t 一様に $\mu_t^{(N)} \to \mu_t$ 弱．　さらに，$L \in \mathbb{N}$ と $y_1, \ldots, y_L$ に対して $\nu_i^{(N)} = \nu_i$, $N \in \mathbb{N}$, と $\lim_{N\to\infty} y_i^{(N)} = y_i$ とすると，確率１で $Y_i^{(N)}(t)$ は t 一様に収束 (propagation of chaos);

$$Y_i(t) = y_i + \int_{s\in(0,t]} \int_{(w,z)\in W\times[Y_i(s-).1]} w(z,s)\, \mu_s(dw \times dz)\, ds$$
$$- \int_{s\in(0,t]} \int_{\xi\in\mathbb{R}_+} Y_i(s-)\, 1_{\xi\in[0,w_i(Y_i(s-),s))}\, \nu_i(d\xi ds) \qquad \diamond$$

分布の集合の弱収束位相で時間について一様収束でポワッソンのサンプルについて概収束　（弱収束：異種粒子の揺らぎの相殺によるLLN）

Poisson乱測度による非独立増分点過程の構成

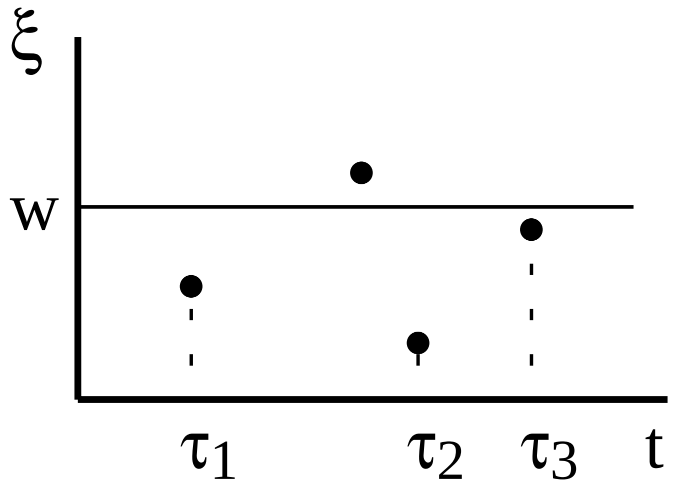
妥当な仮定の下，期待する最善の結果←極限の構成1,2

1. **極限は**Poisson（**独立増分**）**過程で書けない：適切な確率過程を構成**

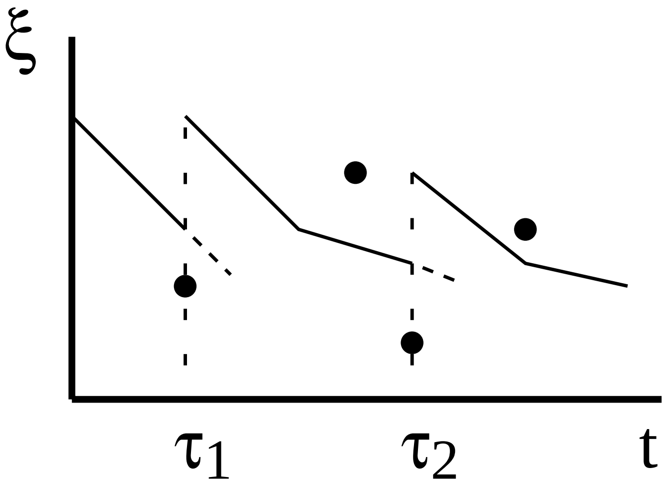
$\tilde{\nu}(t) = k,\ \tau_k \leqq t < \tau_{k+1};\ \tau_0 = 0$，**を**$\nu$：**単位**Poisson r.m. on $\mathbb{R}_+{}^2$

$\tau_k = \inf\{t \geqq \tau_{k-1} \mid \nu(\{(\xi,s) \in \mathbb{R}_+{}^2 \mid \xi \leqq \underline{w}(\tau_{k-1},s),\ \tau_{k-1} < s \leqq t\}) > 0\}$

注．$\underline{w}$**は**2**時刻の関数．模型のは**$w(y,s)$**に**$y = Y_i^{(N)}(s)$



$\tilde{\nu}$: **強度**w**の**Poisson**過程**



強度が直前の到着時刻に依存する点過程

強度が直前の到着時刻に依存する点過程

- Poisson **過程の自明でないのにすっきりした拡張のクラス**

$$\mathrm{P}[\, t < \tau_k \mid \mathcal{F}_{\tau_{k-1}} \,] = \exp\Big(-\int_{\tau_{k-1}}^{t} \underline{w}(\tau_{k-1}, u)\, du\Big),\ t \geqq \tau_{k-1}$$

$$\Omega(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} \underline{w}(t_0, u)\, du, \quad \mathrm{P}[\, \tilde{\nu}(t) = \tilde{\nu}(s) \,] = \sum_{k \geqq 0} \int_{0 =: u_k < u_{k-1} < \cdots < u_0 \leqq s}$$

$$\times\, e^{-\sum_{i=0}^{k-1} \Omega(u_{i+1}, u_i) - \Omega(u_0, t)} \left(\prod_{i=0}^{k-1} \underline{w}(u_{i+1}, u_i)\, du_i \right)$$

$\underline{w}$ **が第 1 変数によらないとき下記によって** $\mathrm{P}[\, \tilde{\nu}(t) = \tilde{\nu}(s) \,] = e^{-\Omega(s,t)}$ **を再現：**

$$\int_{0 \leqq u_1 \leqq u_2 \leqq \cdots \leqq u_k \leqq s} \prod_{i=1}^{k} f(u_i) du_1\, du_2 \ldots du_k = \frac{1}{k!} \Big(\int_0^s f(v) dv \Big)^k$$

ある偏微分方程式系の積分項を持つ一般化

極限の構成 2．特性曲線の方法で解ける偏微分方程式系の一般化

再掲：$\varphi(dw,(y_0,t_0),t) = \mu_t(dw \times [y_C((y_0,t_0),t),1])$;
$y_C((y_0,t_0),t) = 1 - \varphi_{y_C}(W,(y_0,t_0),t)$

定理１． $y_C((y_0,t_0),t_0) = y_0$，$(y_0,t_0) \in$ **初期値境界値**Γ_T，
$\mu_t(dw \times [0,1)) = \lambda(dw), \quad t \in [0,T]$ **（総量保存境界条件）**，
$\mu_t(W \times [y,1)) = 1 - y, \quad (y,t) \in [0,1] \times [0,T] \quad (y_C = 1 - \varphi(W))$,

$$\mu_t(dw \times [y_C(\gamma,t),1)) = \mu_{t_0}(dw \times [y_0,1)) - \int_{s=t_0}^{t}\int_{z=y_C(\gamma,s)}^{1} w(z,s)\mu_s(dw \times dz)\,ds,$$

$\gamma = (y_0,t_0)$，$(\gamma,t) \in \Delta_T = \{(t,\Gamma_t)$ **の対**$\}$
を満たす，Lipschitz **連続な** (y_C,μ_t) **がただ一つ存在する．** ◇

例．流体成分 α **が有限種類のとき** $U_\alpha(y,t) = \mu_t(\{w_\alpha\} \times [y,1])$ **が満たす方程式：**

$$\frac{\partial U_\alpha}{\partial t}(y,t) - \sum_\beta \int_y^1 w_\beta(z,t)\frac{\partial U_\beta}{\partial z}(z,t)dz\frac{\partial U_\alpha}{\partial y}(y,t) = \int_y^1 w_\alpha(z,t)\frac{\partial U_\alpha}{\partial z}(z,t)dz$$

一般化方程式の確率過程による解表現

$w(y,t)$ から $\underline{w}(s,t)$ を定義　　Γ_T の順序：$(0,T) \succeq O = (0,0) \succeq (1,0)$

流れ θ **の集合** $\Theta_T := \{\theta : \ \Delta_T \to [0,1] \mid \theta(z,s),s) = z,\ (z,s) \in \Gamma_T,$
連続，γ について非増加全射，t について非減少$\}$

確率順位付け模型の強度 $w: \ [0,1]\times[0,T] \to \mathbb{R}_+$ と，流れ $\theta \in \Theta_T$ に対して

直前の到着時刻に依存する点過程 $\tilde{\nu}_{\theta,w,z}$ の強度 $\underline{w}_{\theta,w,z}: \ [0,T]^2 \to \mathbb{R}_+$ を

$$\underline{w}_{\theta,w,z}(s,t) = \begin{cases} w(\theta((z,0),t),t), & \text{if} \quad s = 0, \\ w(\theta((0,s),t),t), & \text{if} \quad s > 0. \end{cases}$$ として，

$$\varphi_\theta(dw,(y_0,t_0),t) := \int_{z\in[y_0,1]} \mathsf{P}[\,\tilde{\nu}_{\theta,w,z}(t) = \tilde{\nu}_{\theta,w,z}(t_0)\,]\,\mu_0(dw\times dz)$$

$\mathcal{G}(\theta)((y_0,t_0),t) := 1 - \varphi_\theta(W,(y_0,t_0),t)$ で $\mathcal{G}: \ \Theta_T \to \Theta_T$

定理１'．$\theta = \mathcal{G}(\theta)$ を満たす $\theta = y_C \in \Theta_T$ がただ一つ存在する　$\diamond$

$$\begin{aligned}\varphi_{y_C}(dw,(y_0,t_0),t) &= \int_{z\in[y_0,1]} \mathsf{P}[\,\tilde{\nu}_{y_C,w,z}(t) = \tilde{\nu}_{y_C,w,z}(t_0)\,]\,\mu_0(dw\times dz) \\ &= \mu_t(dw \times [y_C((y_0,t_0),t),1])\end{aligned}$$

４．流れが定める強度に従う確率順位付け模型

主定理（流体力学極限）の証明（従属確率変数列の大数の法則）

- 流れが定める強度に従う確率順位付け模型　（中間模型の定義）
- 関数値独立確率変数列の大数の強法則（中間模型の収束）
- Gronwall 不等式型の評価（中間模型と元の模型の極限の一致）

中間模型＝同じ極限を独立確率過程列の大数の法則として得る粒子系

強度が直前の到着時刻に依存する点過程 $\tilde{\nu}_i^{(N,\theta)}$; $\underline{w} = \underline{w}_{\theta,w_i,y_i^{(N)}}$

$$Y_i^{(N,\theta)}(t) = y_i^{(N)} + \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\int_{s\in(0,t]} \mathbf{1}_{Y_j^{(N,\theta)}(s-)>Y_i^{(N,\theta)}(s-)}\,\tilde{\nu}_j^{(N,\theta)}(ds) - \int_{s\in(0,t]} Y_i^{(N,\theta)}(s-)\,\tilde{\nu}_i^{(N,\theta)}(ds)$$

θ 任意で $\tilde{\nu}_j^{(N,\theta)}$ が独立な，強度が直前の到着時刻に依存する点過程である以外は確率順位付け模型と同じ

元の模型と中間模型と共通の極限

SDEの$\tilde{\nu}$以外の部分は共通（先頭に跳ぶ規則）　　$\tilde{\nu}$の違い

元の模型：Poisson過程だが$w_i(Y_i,t)$経由の従属性

↓ $N\to\infty$ はPoisson乱測度のcouplingで概収束（sample毎に先頭への跳び一致）

中間模型：独立だが非独立増分な点過程（θ任意）

↓ $N\to\infty$ は大数の完全法則＋**期待値の収束**$(\theta=y_C)$

極限記述：（関数方程式の）非独立増分な点過程の確率で書ける解

再掲．中間模型と元の模型の極限（主定理のカオスの伝搬）

$$
\begin{aligned}
Y_i^{(N,\theta)}(t) = y_i^{(N)} &+ \int_{s\in(0,t]} \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{Y_j^{(N,\theta)}(s-)>Y_i^{(N,\theta)}(s-)}\, \tilde{\nu}_j^{(N,\theta)}(ds) \\
&- \int_{s\in(0,t]} Y_i^{(N,\theta)}(s-)\,\tilde{\nu}_i^{(N,\theta)}(ds)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_i(t) = y_i &+ \int_{s\in(0,t]} \int_{(w,z)\in W\times[Y_i(s-).1]} w(z,s)\,\mu_s(dw\times dz)\,ds \\
&- \int_{s\in(0,t]} Y_i(s-)\,\tilde{\nu}_i(ds)
\end{aligned}
$$

関数値独立確率変数列の一様な大数の完全法則

- **点過程の詳細性質**→ $\mathsf{E}[\,\varphi^{(N,\theta)}\,] \longrightarrow \varphi_\theta$
- **大数の完全法則**（一般論）→ $\varphi^{(N,\theta)} - \mathsf{E}[\,\varphi^{(N,\theta)}\,] \longrightarrow 0$ 但し

元模型との差の Gronwall 評価の苦労を見越して**始終２重一様なモーメント評価**

$\triangle = \{(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq T\}$
$D_\uparrow$：$\triangle$ 上の非減少右連続左有極限関数の差と同様の単調性を持つ２変数関数の集合

定理． $r > 0$，$q > 2$，各 N 毎に $\{Z_i^{(N)}\}_{i=1}^N$ 独立 $D_\uparrow$ 値確率変数，

$\mathsf{E}[\,|Z_i^{(N)}(0,T)|^q\,]^{1/q} \leqq M$，　$|\mathsf{E}[\,Z_i^{(N)}(s,t)\,]| \leqq Mw|t-s|^r$

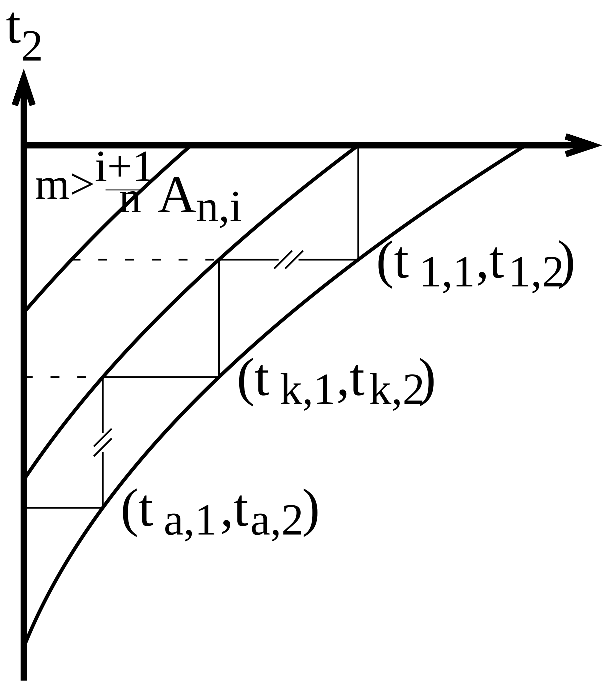
が成り立つとき，$\exists C_q, N_0 > 0$; $(\forall N \geqq N_0)$

$$\mathsf{E}\Big[\sup_{(t_1,t_2)\in\triangle}\left|\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \left((Z_i^{(N)}(t_1,t_2)) - \mathsf{E}[\,Z_i^{(N)}(t_1,t_2)\,]\right)\right|^q\Big]$$
$$\leqq \frac{M^q 2^{q-1}}{N^{q^2 r/(2qr+2r+2)}}\,(C_q^q\,(2T\,w^{1/r}+1) + 2^{2q}) \qquad \diamond$$

注． $\dfrac{\textbf{揺らぎ}}{\textbf{期待値}} = O(N^{-1/2+\epsilon})$　（q 大で ϵ 小だが 0 にはできない）

関数値独立確率変数列の２重に一様な大数の強法則

- $Z_i^{(N)}$ は単調だが期待値を引く→「仕切り」を入れ期待値の変化 $< \epsilon$
- ２重に一様→等高線で網→個数制御はHölder連続性の仮定に帰着



$$Y^{(N)}(t_1,t_2) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} Z_i^{(N)}(t_1,t_2)$$

t_1 の減る方向（右下）に $\mathsf{E}[\,Y^{(N)}\,]$ の減少が $2/n$ 以内の見張りを立てる．

$m(t_1,t_2) = \mathsf{E}[\,Y^{(N)}(t_1,t_2)\,]$

$A_{n,i} = \{(t_1,t_2) \in A \mid \frac{i}{n} < m(t_1,t_2) \leqq \frac{i+1}{n}\}$

$m(t_{k,1},t_{k,2}) = \frac{i-1}{n}$

$(\forall(t_1,t_2) \in A_{n,i})\ \exists k;$

$m(t_1,t_2) \leqq m(t_{k,1},t_{k,2}) + \frac{2}{n}$

$(t_1,t_2) \in A_{n,0}$ または $m(t_1,t_2) = 0$ だと見張りが無いが，$m(t_1,t_2) \leqq \frac{1}{n}$ が成立して有効

- 時間方向は単調性しか使わないので，独立増分性等は不要で，直前の到着時刻に依存する強度を持つ点過程でも何も気にせず使える

多変数階層的Gronwall型評価

- **主定理証明の完成：**$\theta = y_C$ **なる中間模型と元の模型の極限の一致**
- LLN **で稼いだ**$N^{-1/2+\epsilon}$ vs **従属項を**Hölder**ではがす**$N^{\epsilon'}$ **の競争**

$a, c, a_q, b_q, c_q \geqq 0,\ t \in [0,T]$

命題（Gronwall 不等式）． $x(t) \leqq a + c\int_0^t x(s)ds \Rightarrow \ x(t) \leqq a e^{ct}$ ◇

定理（q 変数）． $\vec{t} = (t_1,\ldots,t_q)$,

$$x(\vec{t}) \leqq a e^{c(t_1+\cdots+t_q)} \frac{1}{q}\sum_{i=1}^{q} e^{-ct_i} + \frac{c}{q}\sum_{i=1}^{q}\int_0^{t_i} (x(\vec{t})|_{t_i=u})\,du$$

ならば$x(\vec{t}) \leqq a\,e^{c\,(t_1+\cdots+t_q)}$ ◇

定理（q 再帰＋非線型項 $0 \leqq d \leqq 1$**）．** $x_q \geqq 0,\ q = 1,2,\ldots,$ **が**$x_0 = 1$ **と**

$$x_q(\vec{t}) \leqq a_q \sum_{i=1}^{q} x_{q-1}(t_1,\ldots,\cancel{t_i},\ldots,t_q)^d$$

$$+ b_q \sum_{i=1}^{q} x_{q-1}(t_1,\ldots,\cancel{t_i},\ldots,t_q) + c_q \sum_{i=1}^{q}\int_0^{t_i} (x_q(\vec{t})|_{t_i=s})\,ds$$ **を満たせば，**

$x_q(\vec{t}) \leqq g_q\, e^{\tilde{c}_q\,(t_1+\cdots+t_q)}$. **ここで，**$\tilde{c}_q = \max_{1\leqq k\leqq q} kc_k$, $\tilde{c}_q = \max_{1\leqq k\leqq q} kc_k$ ◇

多変数斉次Gronwall型不等式

- 斉次な場合のq変数拡張が恐らく一番の要点

定理． $c \geqq 0$．$x:\ [0,T]^q \to \mathbb{R}$ 可積分

$$x(\vec{t}) \leqq c \sum_{i=1}^{q} \int_0^{t_i} (x(\vec{t})|_{t_i=s})ds,\ \vec{t} \in [0,T]^q,\ \Rightarrow\ x(\vec{t}) \leqq 0.$$ ◇

証明． $(A_{i,k}y)(\vec{t}) = \dfrac{1}{(k-1)!}\displaystyle\int_0^{t_i} (t_i - s)^{k-1}\, (y(\vec{t}))|_{t_i=s}\, ds$

$A_{i,k}A_{j,\ell} = A_{j,\ell}A_{i,k}$，$\quad A_{i,k}A_{i,\ell} = A_{i,1}^{k+\ell} = A_{i,k+\ell}$ を経て

$$x(\vec{t}) \leqq c^N \sum_{\substack{(k_1,\dots,k_q)\in\mathbb{Z}_+^q;\\ k_1+\cdots+k_q=N}} (A_{q,k_q} A_{q-1,k_{q-1}} \cdots A_{1,k_1}\, x)(\vec{t}).$$

他方，$(A_{i,k}y)(\vec{t}) \leqq \dfrac{t_i^k}{k!} \displaystyle\sup_{\vec{t}\in[0,T]^q} y(\vec{t})$ □

服部－楠岡誠一郎(2012)の結果との関係

ALEA **9 (2)** (2012) 571–607.

・結論（位置強度結合経験分布の収束と札付き粒子のpropagation of chaos）：本講演と同じ

・手法：マルチンゲール収束定理（cf. 本講演は中間模型や極限の詳細性質）

・仮定（初期分布 $\mu_0^{(N)}$）：

1．有界強度　←　極限の非独立増分過程による表示を持ってなかった

2．$\mu_0^{(N)} \longrightarrow \mu_0$ が全変動ノルム収束（cf. 講演の定理は弱収束）　→ たとえば極限で連続分布にできない

特に証明の構造：同一強度関数 w の粒子が無限個ある極限．同種粒子間の揺らぎの打ち消しによる大数の法則

「Amazonランキングの謎を解く」：粒子系はZipfの法則．典型的にはすべての本は互いに異なる強度（平均的な売り上げ能力に不等号の順位），極限は一般化Pareto分布．非有界な連続分布

○ 本講演の結果はこの状況に使えるように，初期分布の収束を弱収束位相にしたのが（Hattori–Kusuokaに比べたときの）こだわり

汎関数中心極限定理（永幡幸生さん木曜午後講演）

本講演の極限：名札1を付けた粒子の軌道 $Y_1^{(N)}$ が確率1の各sampleで（初期位置が収束すれば）収束．特に先頭に跳ぶ時刻が収束．

永幡さんのCLT：名札の付いた粒子たちを先頭に跳ぶ時刻たちで条件付けたとき強度 w が有限種類 $(\sharp W < \infty)$ ならば極限軌道との差についてCLT．

強度（種類）w_ℓ を固定する毎のCLT（マルチンゲール問題）

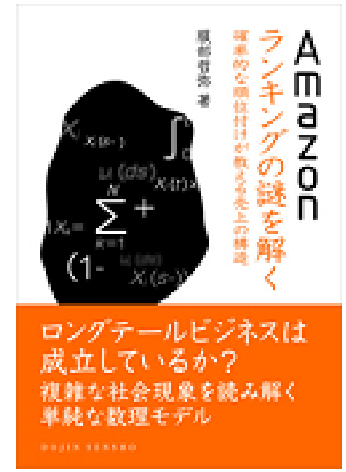
cf. 【服部－楠岡】と同根（同一種類粒子間の揺らぎの打ち消し）？

・異なる w の粒子間の揺らぎの打消のメカニズムへのこだわり

・こだわりだけで無く，強度に位置依存性が無ければ実際に異なる強度の粒子間の揺らぎの打ち消しは証明済み

・他方で【服部】のLLNは $\dfrac{\text{揺らぎ}}{\text{期待値}} = O(N^{-1/2+\epsilon})$ →CLTは？

検索：服部哲弥



T.Hattori, Tohoku Math. J. **71(3)** ('19)
T.Hattori, J.Math.Sci.U.Tokyo **25** ('18)
T.Hattori, Funkcialaj Ekvacioj **60** ('17)

服部哲弥,「Amazon ランキングの謎を解く」化学同人
服部哲弥,「確率変数の収束と大数の完全法則」共立出版

T.Hattori, S.Kusuoka, ALEA **9** ('12)
Y.Hariya, K.Hattori, T.Hattori, Y.Nagahata, Y.Takeshima, T.Kobayashi, Tohoku Math. J. **63** ('11)
K.Hattori, T.Hattori, Stoch.Proc.Appl. **119** ('09)